§4.2 可测函数的定义和性质

Def. $\forall a\in\mathbb{R}$, $E[f>a]$ 可测，则 f 在 E 上可测.

可测函数有以下等价定义：

$E[f\geq a]$ 或 $E[f<a]$ 或 $E[f\leq a]$ 均可测，$\forall a\in\mathbb{R}$

于是有 $E[a<f<b]$. $E[f=a]$. $E[f=+\infty]$ 等可测

Thm. 开集的原像集可测，则 f 可测.

常见的可测函数：

(1) 可测集的示性函数

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E\\ 0, & x\notin E\end{cases}, \quad \chi_E \text{ 可测} \Leftrightarrow E \text{ 可测}$$

$$\forall a\in\mathbb{R},\ \mathbb{R}^n[\chi_E>a]=\begin{cases}\mathbb{R}^n, & a<0\\ E & 0\leq a<1\\ \phi, & a\geq 1\end{cases}$$ ，于是 E 可测 $\Leftrightarrow \chi_E$ 可测.

(2) 简单函数

$f(x)=\sum\limits_{k=1}^{N} C_k\chi_{E_k}$，$C_k\in\mathbb{R}$，$\{E_k\}$ 均可测，则 f 可测

例：$C_1\chi_{E_1}+C_2\chi_{E_2}$，$\mathbb{R}^n[f>a]=\begin{cases}\mathbb{R}^n, & a<0\\ E_1\cup E_2, & 0\leq a<C_1\\ E_2, & C_1\leq a<C_2\\ \phi, & a\geq C_2\end{cases}$

Rem. $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} C_k\chi_{E_k}$ 不是简单函数

(3) 可测集上的连续函数

Lem. E 可测，$f\in C(E)$，则 f 可测.

Pf. $f:E\to\mathbb{R}$，$E[f>a]=E\cap f^{-1}((a,+\infty))$

$\forall x_0\in f^{-1}((a,+\infty))\cap E$，即 $f(x_0)>a$，$\exists\delta>0$ s.t. $x\in E\cap O(x_0,\delta)$ 时

$f(x)>a$，于是 $E\cap O(x_0,\delta)\subseteq E\cap f^{-1}((a,+\infty))$

$E[f>a]=\bigcup\limits_{x\in E[f>a]}(E\cap O(x,\delta_x))=E\cap\Big(\bigcup\limits_{x\in E[f>a]}O(x,\delta_x)\Big)$ 可测，$\forall a\in\mathbb{R}$

(4) 零测集上的函数.

设 $m(E)=0$, 则 $f: E\to\mathbb{R}$ 在 E 上可测.

$\forall a\in\mathbb{R}$, $E[f>a]\subseteq E$, 于是 $m(E[f>a])=0$. 一定可测

(5) 可测集上的单调函数

Lem. 单调函数有至多可列个间断点.

例1 $f\in\mathcal{M}(E)\Rightarrow E[f=a], E[f=+\infty], E[f=-\infty]\in\mathcal{M}$.

Pf. $f\in\mathcal{M}(E)$, 有 $\forall a\in\mathbb{R}$, $E[f\geqslant a]$、$E[f\leqslant a]$ 可测

$$E[f=a]=E[f\geqslant a]\cap E[f\leqslant a]$$

$$E[f=+\infty]=\bigcap_{n=1}^{+\infty}E[f\geqslant n]=\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}E[f<n]\right)^c$$

$$E[f=-\infty]=\bigcap_{n=1}^{+\infty}E[f\leqslant -n]$$

例2 $f\in\mathcal{M}(E)\Leftrightarrow\forall E_1\subset E, E_1\in\mathcal{M}, f\in\mathcal{M}(E_1)$.

Pf. $\forall a\in\mathbb{R}$, $E_1[f>a]=E_1\cap E[f>a]$ 可测.

例3 $E=\bigcup_{i=1}^{m}E_i$, $\{E_i\}$ 互不交可测, 则 $f\in\mathcal{M}(E)\Leftrightarrow f\in\mathcal{M}(E_i)$, $\forall i$

Pf. $\Leftarrow$: $\forall a\in\mathbb{R}$, $E[f>a]=\{x\in\bigcup_{i=1}^{m}E_i: f(x)>a\}$

$$\bigcup_{i=1}^{m}E_i[f>a]=\bigcup_{i=1}^{m}\{x\in E_i: f(x)>a\}$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{m}E_i\right)[f>a]=\bigcup_{i=1}^{m}\left(E_i[f>a]\right)$$

由 $E_i[f>a]$ 可测知, $E[f>a]=\left(\bigcup_{i=1}^{m}E_i\right)[f>a]$ 可测.

例4 $E\in\mathcal{M}$, $f\doteq g$, 则 $f\in\mathcal{M}(E)\Leftrightarrow g\in\mathcal{M}(E)$.

Pf. 设 $f\in\mathcal{M}(E)$, 往证 $g\in\mathcal{M}(E)$; 记 $E=E_1\cup E_2$, E_1 上 $f=g$, E_2 上 $f\neq g$.

$$\forall a\in\mathbb{R},\ E[g>a]=E_1[g>a]\cup E_2[g>a]$$
$$=E_1[f>a]\cup E_2[g>a]$$

由 E_2 可测, E_1 也可测, 于是 $E[g>a]$ 可测

其中E_2零测，$E_2[g>a]\subset E_2$可测，$E_1=E\setminus E_2$可测
又有E_1可测，$E_1[f>a]$可测.

例5 $\{f_n\}\subseteq \mathcal{M}(E)\Rightarrow \sup\{f_n\},\inf\{f_n\},\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n,\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n,\lim\limits_{n\to\infty}f_n\in\mathcal{M}(E)$

Pf. $\forall a\in\mathbb{R}$，记$g=\sup\{f_n\}$，则$E[g\leq a]=\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}E[f_n\leq a]$
由$\{f_n\}\subseteq\mathcal{M}(E)$，$g\in\mathcal{M}(E)$，即$\sup\{f_n\}\in\mathcal{M}(E)$.
类似记$h=\inf\{f_n\}$，有$E[h\geq a]=\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}E[f_n\geq a]$.
$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n(x)=\inf\limits_{N\geq 1}\sup\limits_{n\geq N}f_n(x)$，由上有$\sup\{f_n\},\inf\{f_n\}$均可测.
$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n(x)=\sup\limits_{N\geq 1}\inf\limits_{n\geq N}f_n(x)$，由上有$\inf\{f_n\},\sup\{f_n\}$均可测.
$\lim\limits_{n\to\infty}f(x)$若存在则与$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}$相等.

Cor. 可测函数列的极限可测
连续函数列的极限在可测集上可测

Thm. $f\geq 0$，$f\in\mathcal{M}(E)$，则存在E上的简单函数列$\{\varphi_n\}$ s.t.
(1) $\varphi_n\uparrow$ (2) φ_n在E上处处收敛至f.

Thm. $f\in\mathcal{M}(E)$，存在E上的简单函数列$\{\varphi_n\}$ s.t. φ_n在E上处处收敛至f. 若f有界，则收敛一致.

Pf. $f=f^+-f^-$，$\varphi_n^+\to f^+$，$\varphi_n^-\to f^-$

Thm. $f\in\mathcal{M}(E)\Leftrightarrow f$是简单函数列的极限
($\{f_n\}\subset\mathcal{M}(E)$，$f_n\to f\Rightarrow f\in\mathcal{M}(E)$)
Thm. $f,g\in\mathcal{M}(E)$，在有意义下$f\pm g$，$f\cdot g$，$\frac{f}{g}\in\mathcal{M}(E)$.

Rem. 有意义指排除$(-\infty)-(-\infty)$，$\frac{a}{0}$等情形.
于是可测函数在几乎处处有限的情形下是线性空间的构成.

§4.3 可测函数的收敛性

$f_n(x) \to f(x)$，$\forall x \in E$：逐点收敛

Def. $\exists E_0$ 为零测集 s.t. $f_n(x) \to f(x)$，$\forall x \in E \setminus E_0$，则 $f_n(x)$ 几乎处处收敛至 $f(x)$.（$f_n(x) \to f(x)$，a.e. 于 E）

$\forall \delta > 0$，$\exists E_0 \subseteq E$ s.t. $m(E_0) < \delta$，且 $f_n \rightrightarrows f$ 在 $E \setminus E_0$ 上，则 $f_n(x)$ 在 E 上近乎一致收敛至 $f(x)$.